UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
CO3121 PROBABILIDADES PARA INGENIEROS
FORMULARIO

Formulario 1: Teoría de Conjuntos

Leyes Distributivas:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad \text{y} \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \qquad (1.1)$$

Ley de Complementos:

$$(A^c)^c = A \qquad (1.2)$$

Leyes de Morgan:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{y} \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c \qquad (1.3)$$

Formulario 2: Propiedades de las Probabilidades y Métodos de Conteo

Axiomas de probabilidad: (2.1)

1) $0 \leq P(A) \leq 1$
2) $P(S) = 1$
3) Si $A_1, A_2, A_3 \cdots$, es una secuencia de eventos mutuamente excluyentes de S, entonces: $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots$

Probabilidad del complemento:

$$P(A^c) = 1 - P(A) \qquad (2.2)$$

Probabilidad de la unión de dos eventos cualesquiera:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad (2.3)$$

Probabilidad de la unión de tres eventos cualesquiera:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \qquad (2.4)$$

Probabilidad de la intersección de un evento y un complemento cualesquiera:

$$P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B) \qquad (2.5)$$

Formas (o maneras) de obtener *r* elementos tomados de un total de *n*:

	Sin restitución	Con restitución
Ordenados	${}_nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$	n^r
No importa el orden	$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$	$\binom{n+r-1}{r} = \dfrac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$

(2.6)

Resultados igualmente probables:

$$P(A) = \frac{\text{número de formas en que el evento } A \text{ puede ocurrir}}{\text{número total de formas posibles}} \qquad (2.7)$$

Formulario 3: Probabilidad Condicional, Teorema de Bayes e independencia

Probabilidad Condicional:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad (3.1)$$

Teorema de multiplicación de probabilidad:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1, A_2)\cdots P(A_n \mid A_1, \ldots, A_{n-1}) \qquad (3.2)$$

Probabilidad Total. Sea $B_1, B_2, \ldots, B_k$ una *partición* del espacio muestral *S*, entonces:

$$P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(A \mid B_j)P(B_j) \qquad (3.3)$$

Teorema de Bayes. Sea $B_1, B_2, \ldots, B_k$ una *partición* del espacio muestral *S*, entonces:

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(A \mid B_j)P(B_j)} \qquad (3.4)$$

Independencia. Dos eventos son independientes si y solo si:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B), \quad \text{lo cual es equivalente a : } \; P(A \mid B) = P(A) \qquad (3.5)$$

Formulario 4: Distribución de una Variable Aleatoria Discreta

La función de distribución (acumulada) de probabilidad de la variable aleatoria X se define como:

$$F(x) = P(X \le x), \quad \text{para toda } x. \tag{4.1}$$

La función de (masa de) probabilidad de la variable aleatoria discreta X se define como:

$$f(x) = P(X = x), \quad \text{para toda } x. \tag{4.2}$$

Distribución discreta Uniforme (n):

$$P(X = k) = \frac{1}{n}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.3}$$

Distribución Bernoulli (p):

$$P(X = k) = p^k (1-p)^{1-k}, \qquad k = 0, 1; \qquad 0 \le p \le 1 \tag{4.4}$$

Distribución Binomial (n, p):

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n; \qquad 0 \le p \le 1 \tag{4.5}$$

Distribución Binomial Negativa (r, p):

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \qquad k = r, r+1, \ldots; \qquad 0 \le p \le 1 \tag{4.6}$$

Distribución Geométrica (p):

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots; \qquad 0 \le p \le 1 \tag{4.7}$$

Distribución Hipergeométrica (N, r, n):

$$P(X = k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n; \qquad k \le r. \tag{4.8}$$

Distribución Poisson (λ):

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots; \qquad 0 \le \lambda < \infty \tag{4.9}$$

<u>Formulario 5: Distribución de Variables Aleatorias Continuas</u>

Función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria continua *X*:

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) \tag{5.1}$$

Función de distribución (acumulada) de probabilidad de la variable aleatoria continua *X*:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{5.2}$$

Probabilidad de un intervalo de la variable aleatoria continua *X*:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)dx. \tag{5.3}$$

Densidad de la distribución Uniforme(a, b):

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \qquad a \leq x \leq b. \tag{5.4}$$

Densidad de la distribución Exponencial(α):

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x}, \qquad 0 \leq x < \infty; \qquad 0 < \alpha < \infty \tag{5.5}$$

Densidad de la distribución Normal(μ, σ^2):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \qquad -\infty < x < \infty; \qquad -\infty < \mu < \infty; \qquad \sigma > 0 \tag{5.6}$$

Densidad de la distribución Gamma(α, β):

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, \qquad \Gamma(\alpha) = \int_{0}^{\infty} e^{-y} y^{\alpha-1} dy, \qquad 0 < x < \infty; \qquad \alpha, \beta > 0 \tag{5.7}$$

Densidad de la distribución Beta(α, β):

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \qquad 0 < x < 1; \qquad \alpha, \beta > 0 \tag{5.8}$$

Formulario 6: Distribuciones Multivariadas. Distribuciones Marginales y Condicionales. Independencia

Función de probabilidad conjunta del vector aleatorio discreto (X, Y):

$$f(x,y) = P(X = x, Y = y) \qquad (6.1)$$

Función de distribución (acumulada) conjunta de probabilidad del vector aleatorio discreto (X, Y):

$$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \sum_{s \le x} \sum_{t \le y} f(s,t) \qquad (6.2)$$

Probabilidad de un evento "A", del vector aleatorio discreto (X, Y):

$$P\big[(X,Y) \in A\big] = \sum_{(x,y)\in A} f(x,y) \qquad (6.3)$$

Función de distribución (acumulada) conjunta del vector aleatorio continuo (X, Y):

$$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(s,t)\,ds\,dt \qquad (6.4)$$

Función de densidad de probabilidad conjunta de los vectores aleatorios continuos (X, Y) y (X_1, X_2, … ,X_n):

$$f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x,y), \qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (6.5)$$

Probabilidad de una región "A" en el plano xy, del vector aleatorio continuo (X, Y):

$$P\big[(X,Y) \in A\big] = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy \qquad (6.6)$$

Funciones de Probabilidad Marginal de los vectores aleatorios discretos (X, Y) y (X_1, X_2, … ,X_n):

$$g_x(x) = \sum_y f(x,y), \qquad g(x_1, x_2, x_3) = \sum_{x_4} \cdots \sum_{x_n} f(x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad (6.7)$$

Densidades de Probabilidad Marginal de los vectores aleatorios continuos (X, Y) y (X_1, X_2, … ,X_n):

$$g_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy, \qquad g(x_1, x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_2\,dx_3 \cdots dx_{n-1} \qquad (6.8)$$

Probabilidades Condicionales de los vectores aleatorios (X, Y) y (X_1, X_2, … ,X_n):

$$f(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{g_y(y)}, \qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_k \mid x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{g(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)} \qquad (6.9)$$

Las variables X y Y son independientes si:

$f(x,y) = f(x)f(y)$ ó, de forma equivalente, si: $f(x \mid y) = g_x(x)$ (6.10)

Formulario 7: Valor Esperado. Media. Varianza. Covarianza. Correlación. Esperanza Condicional. Función Generadora de Momentos.

Valor Esperado de una función $h(x)$ de la variable aleatoria X:

$$E[h(X)] = \begin{cases} \sum_x h(x) f(x) = \sum_x h(x) P(X = x) & \text{Si } X \text{ es discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) dx & \text{Si } X \text{ es continua} \end{cases} \tag{7.1}$$

Media ó Valor Esperado de la variable aleatoria X:

$$E(X) = \mu_X = \begin{cases} \sum_x x f(x) = \sum_x x P(X = x) & \text{Si } X \text{ es discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx & \text{Si } X \text{ es continua} \end{cases} \tag{7.2}$$

Varianza de la variable aleatoria X:

$$\mathrm{var}(X) = \sigma_X^2 = E\{(X - E(X))^2\} = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - \mu_X^2 \tag{7.3}$$

Desviación Estándar de la variable aleatoria X:

$$\mathrm{desv.est.}(X) = \sigma_X = \sqrt{\mathrm{var}(X)} \tag{7.4}$$

Algunos resultados útiles para la media y la varianza. Si a y b son constantes entonces:

$$E(aX + b) = E(aX) + E(b) = aE(X) + b \tag{7.5}$$

$$\mathrm{var}(aX + b) = a^2 \, \mathrm{var}(X) = a^2 \sigma_X^2 \tag{7.6}$$

Función Generadora de Momentos de la variable aleatoria X:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) \tag{7.7}$$

Obtención del Momento de orden r-ésimo $E(X^r)$ a partir de la Función Generadora de Momentos:

$$\left. \frac{d^r}{dt^r} M_X(t) \right|_{t=0} = M_X^{(r)}(0) = E(X^r) \tag{7.8}$$

Valor Esperado de una función $h(x, y)$ del vector aleatorio (X, Y):

$$E[h(X,Y)] = \begin{cases} \sum_x \sum_y h(x,y) f(x,y) & \text{Si } (X,Y) \text{ es discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) f(x,y) dx dy & \text{Si } (X,Y) \text{ es continua} \end{cases} \tag{7.9}$$

Covarianza del vector aleatorio (*X, Y*):

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\sigma_{XY}=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]=E(XY)-E(X)E(Y)=E(XY)-\mu_X\mu_Y \qquad (7.10)$$

Coeficiente de Correlación del vector aleatorio (*X, Y*):

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Y)}}=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}, \qquad -1\le\rho_{XY}\le 1 \qquad (7.11)$$

Algunos resultados útiles para la suma de variables aleatorias. Si a y b son constantes entonces:

$$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y) \qquad (7.12)$$

$$\operatorname{var}(aX+bY)=a^2\operatorname{var}(X)+b^2\operatorname{var}(Y)+2ab\cdot\operatorname{cov}(X,Y) \qquad (7.13)$$

Esperanza Condicional de una función $h(x)$ dado que la variable aleatoria $Y=y$:

$$E[h(X)\mid y]=\begin{cases}\sum_x h(x)f(x\mid y) & \text{Si } (X,Y) \text{ es discreta}\\ \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x\mid y)dx & \text{Si } (X,Y) \text{ es continua}\end{cases} \qquad (7.14)$$

Media Condicional de la variable aleatoria X dado $Y=y$:

$$E(X\mid y)=\mu_{X|y}=\begin{cases}\sum_x xf(x\mid y) & \text{Si } (X,Y) \text{ es discreta}\\ \int_{-\infty}^{\infty} xf(x\mid y)dx & \text{Si } (X,Y) \text{ es continua}\end{cases} \qquad (7.15)$$

Varianza Condicional de la variable aleatoria X dado $Y=y$:

$$\operatorname{var}(X\mid y)=\sigma^2_{X|y}=E[\{X-E(X\mid y)\}^2\mid y]=E(X^2\mid y)-[E(X\mid y)]^2=E(X^2\mid y)-\mu^2_{X|y} \qquad (7.16)$$

Algunos resultados útiles con esperanzas condicionales:

$$E(X)=E[E(X\mid Y)] \qquad (7.17)$$

$$\operatorname{var}(X)=E[\operatorname{var}(X\mid Y)]+\operatorname{var}[E(X\mid Y)] \qquad (7.18)$$

Si las variables X y Y son independientes entonces:

- $E(XY)=E(X)E(Y)$, Por lo tanto: $\operatorname{cov}(X,Y)=0$ (7.19)
- $\operatorname{var}(aX+bY)=a^2\operatorname{var}(X)+b^2\operatorname{var}(Y)$ (7.20)
- $E(X\mid Y)=E(X)$ y $E(Y\mid X)=E(Y)$ (7.21)

Formulario 8: Funciones de Variables Aleatorias. Desigualdad de Chebyshev. Ley general de los grandes números. Teorema del Límite Central. Aproximación Normal a la Binomial.

Densidad de probabilidad de una variable aleatoria $Y = g(X)$ definida como función de otra variable aleatoria continua X. Donde además, $g^{-1}(Y) = X$ es la "función inversa" de Y.

Método de la función de distribución: $f(y) = \frac{d}{dy}P(Y \le y) = \frac{d}{dy}P\left(g(X) \le y\right) = \frac{d}{dy}P\left(X \le g^{-1}(y)\right)$ (8.1)

Método de transformación: $f(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = f\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right|$ (8.2)

Desigualdad de Chebyshev:

$$P\left(|X-\mu| \ge k\sigma\right) \le \frac{1}{k^2} \quad \Rightarrow \quad P\left(|X-\mu| \ge k\right) \le \frac{\sigma^2}{k^2} \tag{8.3}$$

Media muestral de n variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ independientes e igualmente distribuidas:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{8.4}$$

Varianza muestral de n variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ independientes e igualmente distribuidas:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right] \tag{8.5}$$

Valor esperado de la media muestral:

$$E\left(\overline{X}\right) = E(X_i) = \mu \tag{8.6}$$

Varianza de la media muestral:

$$\mathrm{var}\left(\overline{X}\right) = \frac{\mathrm{var}(X_i)}{n} = \frac{\sigma^2}{n} \tag{8.7}$$

Valor esperado de la varianza muestral:

$$E\left(S^2\right) = \mathrm{var}(X_i) = \sigma^2 \tag{8.8}$$

Ley (débil) General de los Grandes Números:

Para todo $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} P\left(|\overline{X}-\mu| < \varepsilon\right) = 1$ (8.9)

Teorema del Límite Central:

Sea $\overline{X}$ la media muestral de n variables aleatorias independientes, igualmente distribuidas, con media $E(X_i) = \mu$ y con $\text{var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$. Sea Z una variable aleatoria definida como:

$$Z = \frac{\sqrt{n}\left(\overline{X} - \mu\right)}{\sigma}, \qquad 0 < \sigma^2 < \infty, \tag{8.10}$$

con función de distribución acumulada $F(z)$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} F(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy, \tag{8.11}$$

lo cual significa que la variable Z tiende a distribuirse como $N(0, 1)$ a medida que n tiende a ∞.

Nota: En la obtención de Z (8.10) podríamos reemplazar σ por S y el resultado (8.11) se mantiene, siempre y cuando $0 < \sigma^2 < \infty$. En la práctica, cuando $n \geq 30$, S suele ser una buena aproximación de σ.

Aproximación Normal a la Distribución Binomial.

Sea X una variable aleatoria con distribución Binomial con parámetros n y p. Sea Y la variable aleatoria definida como:

$$Y = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \tag{8.12}$$

con función de distribución acumulada $F(y) = P(Y \leq y)$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} F(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz. \tag{8.13}$$

Esto significa que la variable Y se "aproxima" a una distribución $N(0, 1)$ a medida que n tiende a ∞.

Nota 1: En la practica, una buena aproximación normal de la variable Y se obtiene cuando np y $n(1-p)$ son ambos mayores que 5.

Nota 2: La aproximación se mejora considerablemente cuando se usa la "Corrección por Continuidad", la cual consiste en que cada valor entero no negativo de X es representado por el intervalo que va de $X - ½$ a $X + ½$.